Universität Wuppertal
Fakultät IV, Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Sean Tilson, PhD

Sommersemester 2019
13.5.2019

Übungen zur Linearen Algebra II
Blatt 6

Abgabefrist: Montag, den **20.5.2019** bis **10:10** Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 19
Sei K ein Körper und $f = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in K[t]$ ein Polynom. Die formale Ableitung f' wird durch

$$f' := \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\alpha \in K$ genau dann eine mehrfache Nullstelle von f ist, wenn $f(\alpha) = 0$ und $f'(\alpha) = 0$ gilt. (Sie dürfen *nicht* verwenden, dass die Produktregel aus der Analysis auch für die formale Ableitung auf $K[t]$ gilt, es sei denn Sie beweisen dies vorher.)

Aufgabe 20
Beweisen Sie die *Vorzeichenregel*:
Angenommen, das Polynom

$$f(t) = t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \in \mathbb{R}[t]$$

mit $\alpha_0 \neq 0$ hat reelle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann gilt:

1. Genau dann sind alle Nullstellen λ_i negativ, wenn alle Koeffizienten α_j positiv sind.
2. Genau dann sind alle Nullstellen λ_i positiv, wenn die Vorzeichen der Koeffizienten α_j alternierend sind, d.h. es ist
   $(-1)^{n-j}\alpha_j > 0$ für $j = 0, \ldots, n-1$.

Aufgabe 21
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Seien v und w beliebige Eigenvektoren von f. Zeigen oder widerlegen Sie:
Dann ist auch $v + w$ immer Eigenvektor von f.

Aufgabe 22
Beweisen Sie Satz 20.6. aus der Vorlesung. Konstruieren Sie dabei $Quot(R)$, indem Sie auf $R \times R \backslash \{0\}$ eine geeignete Äquivalenzrelation definieren, analog zur Definition von $\mathbb{Q}$ als Quotient von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Die Abbildung $R \to Quot(R)$ ist dann also durch $r \mapsto \overline{(r, 1)}$ gegeben.
Zusatz (2 Extrapunkte):
Formulieren und beweisen Sie die universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers:
Für jeden injektiven Ringhomomorphismus $R \to K$ mit K ein Körper...