

Übungen zur Linearen Algebra II Blatt 8

Abgabefrist: Montag, den 3.6.2019 bis 10:10 Uhr in die Briefkästen

Aufgabe 27

Sei $V = K^2$. Geben Sie je ein Beispiel für ein $f \in \text{End}_K(V)$ an, dass weder nilpotent noch ein Automorphismus ist und für das gilt

- (i) $f = f^2$ (So eine Abbildung heisst *Projektor* oder *idempotent*)
- (ii) $f \neq f^2$

Zusatz (2 Extrapunkte): Gibt es ein f wie in (ii), für das $f^2 = f^3$ oder $f = f^3$ gilt?

Aufgabe 28

Eine Teilmenge $I \subseteq R$ eines kommutativen Ring R heisst ein *Ideal*, wenn gilt:

$$a, b \in I \Rightarrow a + b \in I \quad \text{und} \quad a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I.$$

- (i) Sind die geraden Zahlen ein Ideal in \mathbb{Z} ? Sind die ungeraden Zahlen ein Ideal in \mathbb{Z} ?
- (ii) Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \text{End}_K(V)$ die Untermenge $\text{Ker}(\varphi_f) \subset K[t]$ ein Ideal ist, wobei $\varphi_f : K[t] \rightarrow \text{End}_K(V)$ die Abbildung $g \mapsto g(f)$ ist.

Aufgabe 29

Sei $f \in \text{End}_K(V)$. Zeigen Sie: Besitzt V eine Basis X , so dass

$$M_{f,X,X} = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

dann ist f nilpotent.