Universität Wuppertal
Fakultät IV, Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Sean Tilson, PhD

Sommersemester 2019
27.6.2019

Übungen zur Linearen Algebra II
Blatt 11

Abgabefrist: Donnerstag, den **4.7.2019** bis **10:10** Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 38
Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass $\chi_f = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_r)^{n_r}$ in Linearfaktoren mit paarweise verschiedenen λ_i zerfällt. Setze $g_i := (f - \lambda_i \cdot \mathrm{id})|_{\mathrm{Hau}(f,\lambda_i)}$ und $d_i = \min\{\ell \,|\, g_i^\ell = 0\}$ für alle $i = 1, ..., r$. Zeigen Sie, dass $p_f = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_r)^{d_r}$ gilt.

Aufgabe 39
Das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie $(2,1,1)^t \times (-1,2,1)^t$.
2. Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$

$$\langle x \times y, z \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

   gilt.

Aufgabe 40
Sei $\varphi \in \mathrm{Bil}_K(V)$ eine Bilinearform und $\widetilde{\varphi} : V \to V^*$ die induzierte lineare Abbildung wie in Bemerkung 23.4. Zeigen Sie: φ ist symmetrisch genau dann, wenn $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi})^* \circ \Phi$ gilt, wobei $\Phi : V \to V^{**}$ die kanonische Abbildung aus Satz 16.11 ist.

Aufgabe 41
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, $X = e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis und die Bilinearform $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$M_{\varphi,X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Es sei $Y = v_1 := (1,-1,0)^t, v_2 := (0,1,0)^t, v_3 := (1,0,1)^t$ eine weitere Basis. Bestimmen Sie $M_{\varphi,Y}$. Berechnen Sie anschließend $\varphi(3v_1 - v_2, v_1 + 2v_2 + v_3)$.