Universität Wuppertal
Fakultät IV, Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Sean Tilson, PhD

Sommersemester 2019
17.-19.6.2019

Probeklausur Lineare Algebra II

Aufgabe 1 Es sei K ein Körper und $F : \mathrm{Mat}_K(n \times n) \to K$ eine Abbildung. Geben Sie Bedingungen an F an, so dass

$$F(A) = \det(A)$$

für alle $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ gilt.

Aufgabe 2 Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ an,

(i) die trigonalisierbar ist, aber nicht diagonalisierbar.

(ii) die $\chi_A \neq p_A$ erfüllt.

(iii) die $\chi_A = p_A$ erfüllt.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie das Minimalpolynom zu folgender reellen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und Minimalpolynom, die Eigenräume und die Haupträume von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix T, so dass $T^{-1}AT = D+N$, mit D diagonal, N nilpotent und $DN = ND$ gilt.

Aufgabe 5 Welche der folgenden Aussagen für $n \times n$-Matrizen sind richtig, welche sind falsch? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

1. Ist $\det(A) = 0$, dann ist A nilpotent.
2. Zerfällt χ_A in Linearenfaktoren und alle Eigenwerte sind 0, dann ist A nilpotent.
3. Sind A, B invertierbar, dann ist auch $\alpha A + \beta B$ invertierbar für alle $\alpha, \beta \in K - \{0\}$.
4. Ist $A \cdot B$ invertierbar, dann sind auch A und B invertierbar.
5. Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so gilt immer $dim(V) \geq dim(V/U)$.

Aufgabe 6 Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ nilpotent. Zeigen Sie, dass dann $E_n - A$ invertierbar ist. (Hinweis: geometrische Reihe).

Aufgabe 7 Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus von endlichdimensionalen Vektorräumen mit Basen X und Y. Wie sind die dualen Basen X^* und Y^* definiert? Formulieren Sie anschließend einen Satz, der die darstellenden Matrizen von f und der dualen Abbildung f^* vergleicht.